CEU Universidad San Pablo

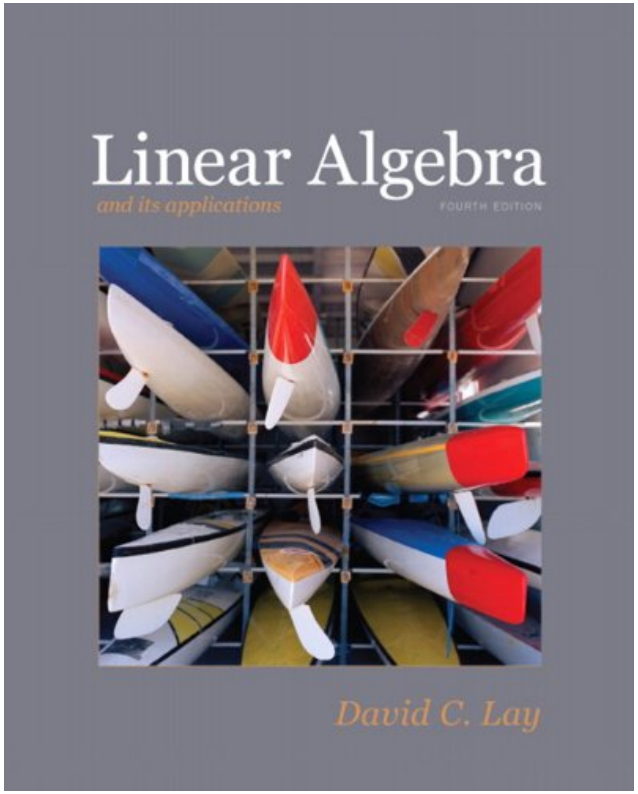
# Tema 2: Sistemas de ecuaciones lineales

Curso 2016/2017

Ruzica Jevtic
Universidad San Pablo CEU
Madrid

# Índice de contenidos

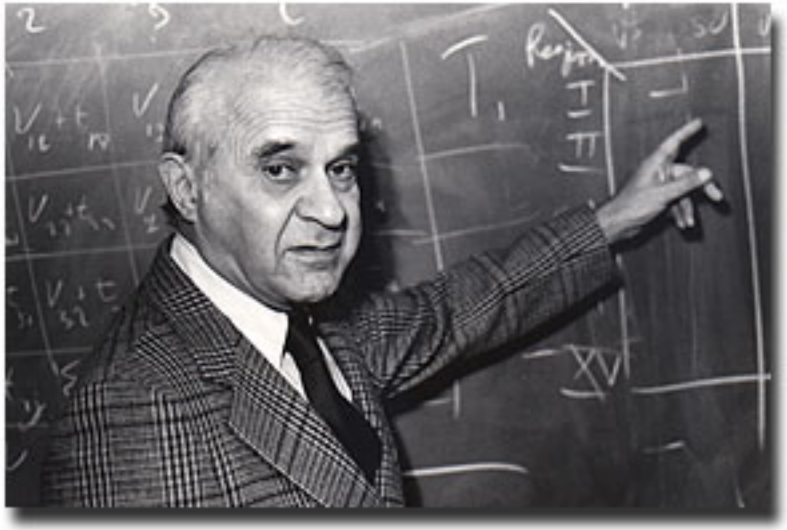
# Referencias




Lay D. *Linear algebra and its applications (4th ed)*.
Chapter 1.

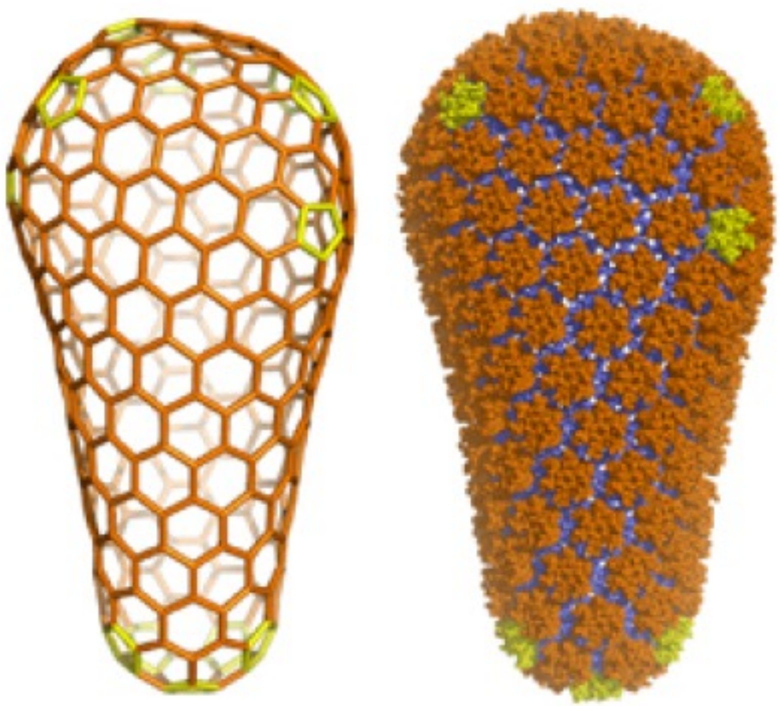
# Reseña histórica

- Wassily Leontief era un economista que trabajó en Harvard. En el año de 1949 hizo un analisis de la economía de Estados Unidos usando un sistema de equaciones lineales de 42 incognitas. El ordenador Mark II tardó 56 horas en resolverlo.



# Reseña histórica

- Actualmente necesitamos unas 2 semanas en un superordenador (128 núcleos) para resolver la estructura de un ensamblaje macromolecular
- Tenemos 1.000 millones de ecuaciones con unos 3 millones de incógnitas



# Índice de contenidos

- Introducción
- Algoritmo de Gauss-Jordan
- Interpretación como un subespacio
- Existencia y unicidad de soluciones
- Independencia lineal
- Transformaciones lineales
- Transformaciones geométricas

# Introducción

- Una ecuación lineal es aquella que puede ser expresada de la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i = b \quad \Longrightarrow \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b$$

donde las incógnitas son las $x_i$ (i = 1, 2,…, n) y las $a_i$ y $b$ son coeficientes (números reales o complejos)

| Ejemplos de ecuaciones lineales | Ejemplos de ecuaciones no lineales |
|---|---|
| $7x_1 - 2x_2 = 4$ <br> $7\left(x_1 - \sqrt{3}x_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1$ <br> $\Longrightarrow \left(7 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x_1 - 7\sqrt{3}x_2 = 0$ | $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 1$ <br> $\sqrt{x_1} + x_2 = 1$ |

CEU Universidad San Pablo

# Introducción

- Un sistema de ecuaciones lineales (o sistema lineal) es una colección de una o más ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 &= 8 \\ x_1 \qquad\quad - 4x_3 &= -7 \end{aligned}$$

- El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto de valores ($s_1$, $s_2$, …, $s_n$) que pueden ser asignados a ($x_1$, $x_2$, …, $x_n$) para que la ecuación se cumpla

CEU Universidad San Pablo

# Introducción

## Ejemplo

Considerando el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x_1 - x_2 = 7$$

$$x_1 + 2x_2 = 11$$

$\mathbf{x} = (5, 3)$ es una solución al sistema de ecuaciones porque

$$2 \cdot 5 - 3 = 7$$

$$5 + 2 \cdot 3 = 11$$

De hecho, esta es la única solución y, por lo tanto, $S = \{(5, 3)\} \subset \mathbb{R}^2$

CEU Universidad San Pablo

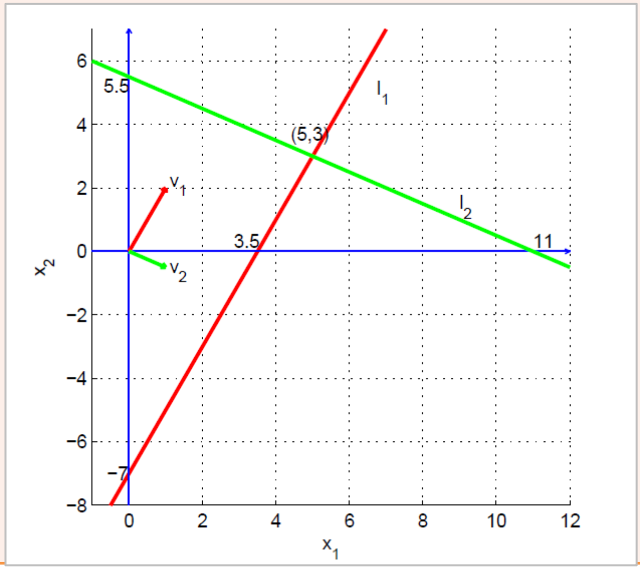
# Interpretación geométrica

## Ejemplo

$$l_1:\ 2x_1 - x_2 = 7 \ \Longrightarrow\ x_2 = 2x_1 - 7 \ \Longrightarrow\ \mathbf{v_1} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})$$

$$l_2:\ x_1 + 2x_2 = 11 \ \Longrightarrow\ x_2 = \frac{11 - x_1}{2} \ \Longrightarrow\ \mathbf{v_2} = \left(\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$$

Cada una de las ecuaciones representa realmente a una línea. En este caso, ambas líneas se cortan en el punto (5, 3), que es la única solución de este sistema de ecuaciones



# Interpretación geométrica

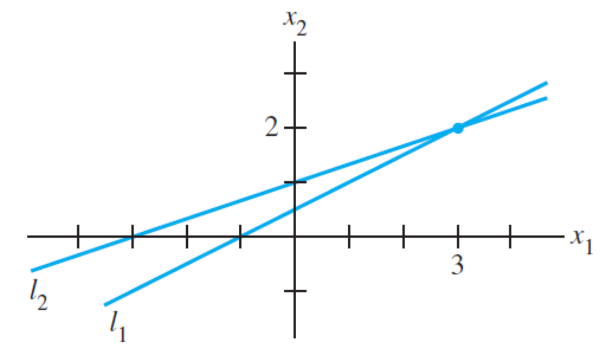
## Ejemplo

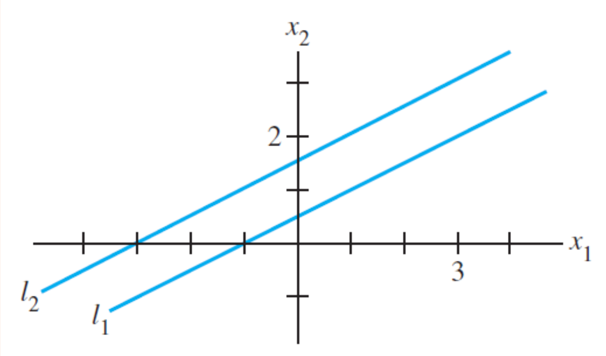
Los sistemas de ecuaciones lineales pueden tener una única solución (izquierda), no tener solución (medio) o infinitas soluciones ($l_1 = l_2$; derecha)

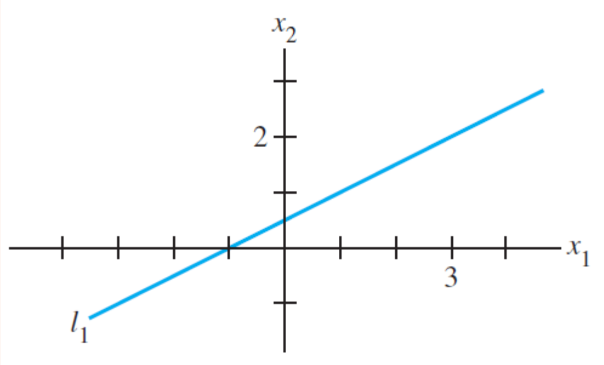
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$




Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es **consistente** cuando tiene una o infinitas soluciones, e **inconsistente** cuando no tiene solución

# Interpretación geométrica

## En general

Con ecuaciones lineales podemos representar:

- una **línea** en 2D: $a_1x_1 + a_2x_2 = b$
- un **plano** en 3D: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$
- un **hiperplano** en nD: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$

# Notación matricial

Dado el sistema de ecuaciones, su **matriz de coeficientes** se representa como:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + \phantom{0}x_3 &= \phantom{-}0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= \phantom{-}8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

La **matriz aumentada** del sistema puede representarse como

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right) \quad [\tilde{A}]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad [A\mathbf{x} = \mathbf{b}]$$

# Notación matricial

**En general**

- $A \in M_{m\,\mathrm{x}\,n}$ se denomina a la <u>matriz</u> de un sistema de ecuaciones con ***m*** **ecuaciones** con ***n*** **incógnitas**
- $\tilde{A} \in M_{m\,\mathrm{x}(n+1)}$ se denomina a la <u>matriz aumentada</u> de un sistema de ecuaciones con ***m*** **ecuaciones** con ***n*** **incógnitas**

- El número de filas (ecuaciones) **<u>siempre</u>** se pone primero
- ***m*** y ***n*** siempre son números positivos

# Resolución de un sistema lineal

- Método sistemático de resolución utilizando matrices
- Estrategia: reemplazar un sistema con otro equivalente (es decir, con otro con el mismo conjunto de soluciones) más sencillo de resolver
- Si las matrices aumentadas de dos sistemas lineales son equivalentes por filas, entonces los sistemas tienen el mismo conjunto de soluciones
- Para resolver un sistema de ecuaciones con la matriz aumentada, se utilizan las siguientes operaciones básicas sobre las filas de la misma:

| | | |
|---|---|---|
| Intercambio | $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j$ | La fila *i* se intercambia con la fila *j* |
| Escalado | $\mathbf{r}_i \leftarrow k_i \mathbf{r}_i$ | La fila *i* se multiplica por un escalar ≠ 0 |
| Sustitución | $\mathbf{r}_i \leftarrow \mathbf{r}_i + k_j \mathbf{r}_j$ | La fila *i* se sustituye por la suma de sí misma con la fila *j* escalada |

CEU Universidad San Pablo

# Ejemplo de resolución

- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

1) Se mantiene $x_1$ en la primera ecuación y se elimina de las otras ecuaciones

$$\begin{array}{rr} 4 \cdot [\text{equation } 1]: & 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 0 \\ + [\text{equation } 3]: & -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \\ \hline [\text{new equation } 3]: & -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -3x_2 + 13x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo de resolución

2) Se multiplica la ecuación 2 por ½ para obtener un 1 como coeficiente de $x_2$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + \phantom{4}x_3 &= \phantom{-}0 \\ x_2 - 4x_3 &= \phantom{-}4 \\ -3x_2 + 13x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

3) Se usa $x_2$ en la ecuación 2 para eliminar $-3x_2$ en la ecuación 3

$$\begin{array}{rr} 3 \cdot \text{[equation 2]:} & 3x_2 - 12x_3 = 12 \\ + \text{[equation 3]:} & -3x_2 + 13x_3 = -9 \\ \hline \text{[new equation 3]:} & x_3 = 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 &= 4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo de resolución

4) Eliminamos $-4x_3$ en la ecuación 2 usando la ecuación 3, y $x_3$ en la ecuación 1 usando la ecuación 3

$$\begin{array}{rrl} 4\cdot[\text{eq. }3]: & 4x_3 &= 12 \\ +[\text{eq. }2]: & x_2 - 4x_3 &= 4 \\ \hline [\text{new eq. }2]: & x_2 &= 16 \end{array} \qquad \begin{array}{rrl} -1\cdot[\text{eq. }3]: & -x_3 &= -3 \\ +[\text{eq. }1]: & x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ \hline [\text{new eq. }1]: & x_1 - 2x_2 &= -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & & &= -3 \\ & & x_2 & & &= 16 \\ & & & & x_3 &= 3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

5) Eliminamos $-2x_2$ en la ecuación 1 sumando 2 veces la ecuación 2. Finalmente obtenemos:

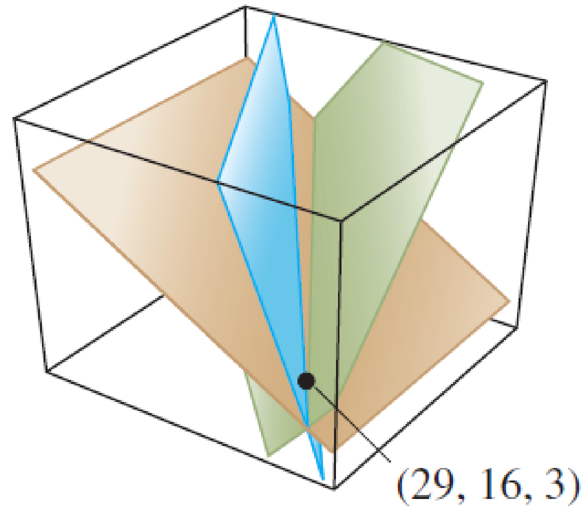
$$\boxed{\left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & & &= 29 \\ & x_2 & &= 16 \\ & & x_3 &= 3 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}}$$

# Ejemplo de resolución

Comprobamos que los valores del conjunto de soluciones (29, 16, 3) son una solución del sistema de ecuaciones inicial:

$$
\begin{aligned}
(29) - 2(16) + (3) &= 29 - 32 + 3 = 0 \\
2(16) - 8(3) &= 32 - 24 = 8 \\
-4(29) + 5(16) + 9(3) &= -116 + 80 + 27 = -9
\end{aligned}
$$

Cada ecuación original determina un plano en un espacio tridimensional. El punto (29, 16, 3) pertenece o se encuentra en los tres planos




CEU Universidad San Pablo

# Existencia y unicidad de soluciones

- Dado el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & 2x_2 & -8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 & +5x_2 & +9x_3 & = & -9 \end{array} \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Se puede resolver $x_3$ ($x_3 = 3$), entonces usar este valor en la segunda ecuación para resolver $x_2$, y finalmente usar ambos valores en la primera ecuación para resolver $x_1$.

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones tiene una solución y es única. Decimos que el sistema de ecuaciones es compatible o consistente. El conjunto de soluciones es $S = \{(29, 16, 3)\}$

**Octave**

```
A =[1 -2 1; 0 2 -8; -4 5 9];
b = [0; 8; -9];
x = A\b
```

# Existencia y unicidad de soluciones

- Dado el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{rrrcl} & x_2 & -4x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & -8x_2 & +7x_3 & = & 1 \end{array} \sim \dots \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

La última ecuación implica 0 = 5/2, lo cual es imposible. Por lo tanto, **no hay solución** y decimos que el sistema es incompatible o inconsistente. El conjunto de soluciones es $S = \emptyset$

- Dado el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & = & 2 \end{array} \sim \dots \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hay infinitas soluciones. El sistema es compatible indeterminado. El conjunto de soluciones es $S = \{(x_1, 1 - x_1)\}$

CEU Universidad San Pablo

# Ejercicios

- Tema 2_Enunciados de ejercicios I
  - Ejercicio 1.1.2
  - Ejercicio 1.1.4
  - Ejercicio 1.1.11
  - Ejercicio 1.1.17
  - Ejercicio 1.1.26

# Índice de contenidos

# Matrices escalonadas

- Una matriz rectangular es escalonada (o escalonada por filas) si y sólo si:
  1. Dentro de cada fila, el primer elemento diferente de cero (denominado "elemento de cabecera", pivote o "*leading entry*") está en una columna a la derecha del elemento de cabecera de la fila anterior
  2. Dentro de cada columna, todos los valores por debajo del elemento de cabecera son cero
  3. Todas las filas sin elemento de cabecera (es decir, contienen únicamente ceros) están por debajo de todas las filas en las cuales al menos un elemento es distinto de cero

$$A_1 = \begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$$

# Matrices escalonadas

- Una matriz rectangular es escalonada reducida (o escalonada reducida por filas) si y sólo si:
  1. Es escalonada
  2. El elemento de cabecera de cada fila es 1
  3. El elemento de cabecera, cuyo valor es 1, es el único valor distinto de cero en su columna

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

# Matrices escaladas

**Teorema: unicidad de la matriz escalonada reducida (por filas)**

Cada matriz es equivalente por filas a una y sólo una matriz escalonada reducida por filas

**Ejemplo**

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l} \mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - 4\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_3 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \\
\mathbf{r}_3 \leftrightarrow \mathbf{r}_3 + 3\mathbf{r}_2 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{l} \mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 - 2\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \leftarrow \frac{1}{3}\mathbf{r}_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l} \mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 + 3\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

# Matrices escalonadas

**Octave**

```
A = [1 2 3; 4 5 6; -1 -1 0]
A(2,:) = A(2,:) – 4*A(1,:)
A(3,:) = A(3,:) + A(1,:)
aux = A(2,:); A(2,:) = A(3,:); A(3,:) = aux
A(3,:) = A(3,:) + 3*A(2,:)
A(1,:) = A(1,:) – 2*A(2,:)
A(3,:) = 1/3 * A(3,:)
A(1,:) = A(1,:) + 3*A(3,:)
A(2,:) = A(2,:) – 3*A(3,:)
```

# Matrices escalonadas

## Ejemplo

El mismo ejemplo pero utilizando diferentes operaciones por filas

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
r_1 \leftarrow r_3 & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
r_1 \leftarrow -r_1 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l} r_2 \leftarrow r_2 - 4r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{l} r_1 \leftarrow r_1 - r_2 \\ r_3 \leftarrow r_3 - r_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\
r_3 \leftarrow -\frac{1}{3}r_3 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l} r_1 \leftarrow r_1 + 6r_3 \\ r_2 \leftarrow r_2 - 6r_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

# Algoritmo de Gauss-Jordan

- **Pivote:** en el algoritmo de Gauss-Jordan, es el primer elemento no nulo de cada fila. En una matriz escalonada reducida por filas, dicho elemento será un 1. Este elemento se usa para realizar ciertas operaciones de simplificación/reducción

- **Columna pivote:** es aquella que contiene un pivote

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Pivot

Pivot column

Pivot

Next pivot column

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivot

Pivot columns

General form: $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

# Algoritmo de Gauss-Jordan

- Objetivo: obtener una matriz escalonada reducida por filas.
- Algoritmo en 5 pasos (4 para generar una matriz escalonada por filas)

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

**Paso 1**

Seleccionar la columna más a la izquierda no nula. Esa columna es una columna pivote. La posición pivote está en la parte superior.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Pivot column

# Algoritmo de Gauss-Jordan

## Paso 2

Seleccionar una entrada no nula ($\neq 0$) como pivote. Si es necesario, intercambiar filas para mover esta entrada a la posición pivote

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ \boxed{3} & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 \leftrightarrow \mathbf{r}_1]{} \begin{array}{l} \text{Pivot} \\ \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \end{array}$$

## Paso 3

Usar operaciones básicas sobre filas para obtener ceros en todas las posiciones debajo del pivote

$$\begin{array}{l} \text{Pivot} \\ \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]{} \begin{array}{l} \text{Pivot} \\ \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \end{array}$$

## Paso 4

Tapar o ignorar la fila que contiene la posición pivote y todas las que haya, si hay, por encima de ella. Repetir los pasos 1-3 a la submatriz restante. Repetir el proceso hasta que no haya más filas distintas de cero que modificar

Pivot

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 - \frac{3}{2}\mathbf{r}_2} \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

New pivot column

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Pivot

Tenemos una matriz escalonada por filas. Aplicamos el paso 5 para obtener la reducida

# Algoritmo de Gauss-Jordan

## Paso 5

Empezando con el pivote más a la derecha y más abajo, obtener ceros por encima de cada pivote. Después, si el pivote es distinto de 1, escalar la fila para obtener dicho 1. Repetir el proceso con el siguiente pivote a la izquierda hasta que no haya más pivotes en la matriz.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 + (-2)\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 + (-6)\mathbf{r}_3} \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\mathbf{r}_2 \leftarrow \frac{1}{2}\mathbf{r}_2} \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 + (9)\mathbf{r}_2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftarrow \frac{1}{3}\mathbf{r}_1} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}$$

# Algoritmo de Gauss-Jordan

- Notas (comentarios numéricos/computacionales)

  – En el paso 2, un programa de ordenador generalmente seleccionaría como pivote la entrada de la columna que tenga el valor absoluto más grande. De esta forma, se reducirían los errores de redondeo en los cálculos

  – Calcular la inversa de una matriz de $n \times n$ cuesta del orden de $n^3$ operaciones ( $\mathbf{O}(n^3)$ ). Sin embargo, calcular la matriz escalonada reducida por filas sólo cuesta del orden de $n^2$ operaciones ( $\mathbf{O}(n^2)$ ). La diferencia es más y más importante a medida que la $n$ crece

CEU Universidad San Pablo

# Existencia y unicidad de soluciones (revisada)

- Teniendo en cuenta las matrices escalonadas reducidas por filas, podemos revisar la existencia y unicidad de las soluciones

**Sistemas compatibles/consistentes determinados (solución única)**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Si presenta esta forma, el sistema es compatible/consistente determinado y el conjunto de soluciones es de la forma de un punto simple $S = \{(1, 4, 0)\}$

# Existencia y unicidad de soluciones (revisada)

## Sistemas compatibles/consistentes indeterminados (infinitas soluciones)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si presenta esta forma, el sistema es compatible/consistente indeterminado. El conjunto de soluciones es $S = \{(1, 4 - x_3, x_3)\ \forall x_3 \in \mathbb{R}\}$. Como el conjunto de soluciones depende de una variable simple, dicho conjunto de soluciones es una línea.

- Variables básicas. Son aquellas que están en una columna pivote
- Variables libres. Son aquellas que están en una columna NO pivote

CEU Universidad San Pablo

# Existencia y unicidad de soluciones (revisada)

## Sistemas compatibles/consistentes indeterminados (infinitas soluciones)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si presenta esta forma, el sistema es compatible/consistente indeterminado. El conjunto de soluciones es $S = \{(1, 4 - x_3 - x_4, x_3, x_4)\ \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$. Ahora, el conjunto de soluciones depende de dos variables, y por lo tanto, es un plano.

## Sistemas incompatibles/inconsistentes (sin solución)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si presenta esta forma, el sistema es incompatible/inconsistente, ya que la última ecuación establece que $0 = 1$. El conjunto de soluciones es $S = \emptyset$.

# Algoritmo para resolver sistemas de ecuaciones

- Algoritmo

1) Escribir la matriz aumentada del sistema
2) Obtener la matriz escalonada mediante los 4 primeros pasos del algoritmo de Gauss-Jordan, para determinar si el sistema es compatible. Si no lo es, parar. En otro caso, continuar con el paso 5
3) Obtener la matriz escalonada reducida aplicando el paso 5 del algoritmo de Gauss-Jordan
4) Escribir el sistema de ecuaciones correspondiente a la matriz obtenida en el paso 3
5) Reescribir cada ecuación no nula (llena de ceros) del paso 4 de tal forma que cada variable básica se exprese en función de cualquier variable libre que aparezca en la ecuación

# Ejercicios

- Tema 2_Enunciados de ejercicios II
  - Ejercicio 1.2.2
  - Ejercicio 1.2.9
  - Ejercicio 1.2.11
  - Ejercicio 1.2.19

# Índice de contenidos

# Interpretación como un subespacio

- Subespacio generado (spanned) por columnas

Consideremos el sistema de ecuaciones dado por la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $A \in M_{n \times p}$. Si denominamos $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ a cada una de las $p$ columnas de $A$, la ecuación anterior puede ser reescrita como:

$$\left(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \dots\ \mathbf{a}_p\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}$$

Es decir, $A\mathbf{x}$ es el subespacio generado por las columnas de la matriz $A$.

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p\} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} = A\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p\}$$

Con esta definición, se pueden plantear preguntas como: *"Encontrar los pesos de los coeficientes $\mathbf{x}_i$ tales que el vector $\mathbf{b}$ pertenezca al Span{$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_p$}"*

# Interpretación como un subespacio

## Ejemplo

El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ -5x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

puede ser representado como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, cuáles son los valores de los coeficientes $x_1$, $x_2$ y $x_3$ para que el vector (4, 1) pertenezca al subespacio generado (Span) por los vectores (1, 0), (2, -5), y (-1, 3).

# Interpretación como un subespacio

**Teorema**

La ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene la misma solución que la ecuación vectorial $\sum_{i=1}^{p} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}$ y que el sistema de ecuaciones cuya matriz aumentada es $\tilde{A} = (A|\mathbf{b})$

**Teorema**

Para cualquier $A \in M_{nxp}$ y vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, las siguientes cuatro sentencias son equivalentes, es decir, $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3 \Leftrightarrow P_4$

P1: La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución

P2: $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de $A$

P3: Las columnas de $A$ generan todo $\mathbb{R}^n$, es decir, $\mathrm{Span}\{\mathbf{a}_i\} = \mathbb{R}^n$

P4: $A$ tiene un pivote en cada fila

# Ejercicios

- Tema 2_Enunciados de ejercicios III
  - Ejercicio 1.4.14
  - Ejercicio 1.4.18
  - Ejercicio 1.4.32
  - Ejercicio 1.4.37

# Índice de contenidos

# Existencia y unicidad de soluciones (revisada II)

- Consideremos el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = 0$. Este sistema tiene la solución trivial $x = 0$

- En este caso, lo interesante/importante es determinar si existe una solución no trivial del sistema $A\mathbf{x} = 0$, es decir, si existe un vector $\mathbf{x}$ no nulo que satisfaga la ecuación

> El sistema de ecuaciones homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ tiene una solución no trivial, si y sólo si el sistema tiene al menos una variable libre

CEU Universidad San Pablo

# Existencia y unicidad de soluciones (revisada II)

## Ejemplo

Determinar si el siguiente sistema homogéneo tiene una solución no trivial.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Escribimos la matriz aumentada $[\, A \ \ \mathbf{0} \,]$ y calculamos la matriz escalonada:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que $\mathbf{x_3}$ es una variable libre, entonces $A\mathbf{x} = 0$ tiene soluciones no triviales. Para obtener el conjunto de soluciones, obtenemos la matriz reducida de $[\, A \ \ \mathbf{0} \,]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 \quad\quad - \tfrac{4}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 \quad\quad &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

CEU Universidad San Pablo

# Existencia y unicidad de soluciones (revisada II)

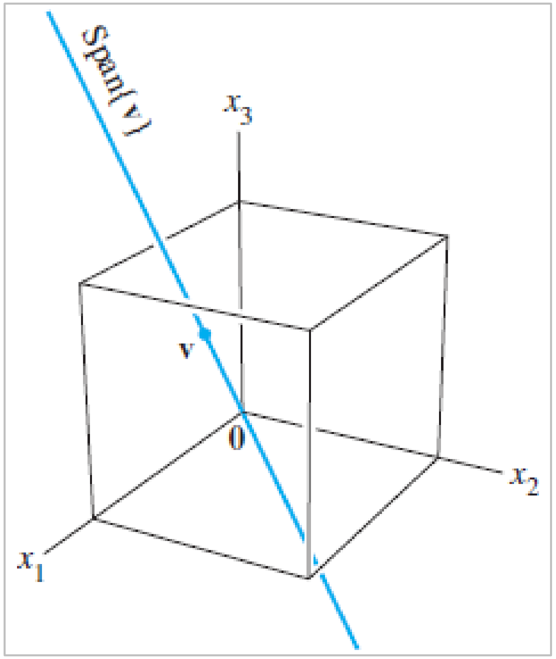
## Ejemplo (…continuación)

Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado y su conjunto de soluciones es:

$$S = \left\{ \left( \frac{4}{3} x_3, 0, x_3 \right) \ \ \forall x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

O lo que es lo mismo, con $A\mathbf{x} = 0$, esta expresión también podemos escribirla como:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3\mathbf{v} \quad \text{donde,} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$




También podemos escribirlo como:

$$S = Span\left\{ \left( \frac{4}{3}, 0, 1 \right) \right\}$$

Geométricamente, el conjunto de soluciones es la recta en $\mathbb{R}^3$, que pasa por el origen y cuyo vector director es $\left( \frac{4}{3}, 0, 1 \right)$

# Existencia y unicidad de soluciones (revisada II)

- Consideremos el sistema no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

**Ejemplo 2**

Describir todas las soluciones del siguiente sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Escribimos la matriz aumentada $[\ A \ \ \mathbf{b}\ ]$ y calculamos su matriz escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} x_1 \qquad - \tfrac{4}{3}x_3 &= -1 \\ x_2 \qquad\qquad &= 2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

que es un sistema compatible indeterminado, cuyo conjunto de soluciones es:

$$S = \left\{ \left( -1 + \frac{4}{3}x_3, 2, x_3 \right) \ \ \forall x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

## Ejemplo 2 (…continuación)

En forma vectorial, también podemos escribirlo como:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{4}{3}x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underset{\mathbf{p}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_3 \underset{\mathbf{v}}{\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones sería:

$$S = \left\{(-1, 2, 0) + \left(\frac{4}{3}x_3, 0, x_3\right) \;\; \forall x_3 \in \mathbb{R}\right\} = (-1, 2, 0) + Span\left\{\left(\frac{4}{3}, 0, 1\right)\right\}$$

Es decir, cualquiera de los infinitos puntos de la línea cuyo vector director es $\left(\frac{4}{3}, 0, 1\right)$ y que pasa por el punto (-1, 2, 0) es una solución del sistema de ecuaciones

# Existencia y unicidad de soluciones (revisada II)

## Ejemplo 3

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

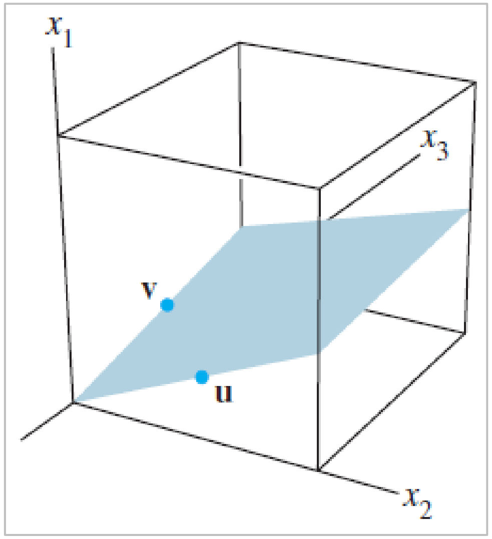
$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ldots \ \sim (\ 10 \quad -3 \quad -2 \ | \ 0\ )$$

Una ecuación lineal simple puede verse como un sistema de ecuaciones muy simple, que:

$$S = \left\{ \left( \frac{3}{10} x_2 + \frac{1}{5} x_3,\ x_2, x_3 \right) \ \forall x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

O lo que es lo mismo, en forma vectorial, la solución general es:

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} x_2 + \frac{1}{5} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$




También podemos escribirlo como:

$$S = Span \left\{ \left( \frac{3}{10}, 1, 0 \right), \left( \frac{1}{5}, 0, 1 \right) \right\}$$

Geométricamente, el conjunto de soluciones es el plano en $\mathbb{R}^3$, que pasa por el origen y contiene a los vectores $\left( \frac{3}{10}, 1, 0 \right)$ y $\left( \frac{1}{5}, 0, 1 \right)$

## Ejemplo 4

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones no homogéneo:

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 10 \quad \Longrightarrow \quad \ldots \sim \left( 10 \quad -3 \quad -2 \mid 10 \right)$$

Este es un sistema compatible indeterminado, cuyo conjunto de soluciones es:

$$S = \left\{ \left( 1 + \frac{3}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_3,\ x_2, x_3 \right) \ \forall x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

O lo que es lo mismo, en forma vectorial, la solución general es:

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{3}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{10}x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

También podemos escribirlo como:

$$S = \left\{ (1,0,0) + \left( \frac{3}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_3,\ x_2, x_3 \right) \ \forall x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = (1,0,0) + Span\left\{ \left( \frac{3}{10}, 1, 0 \right), \left( \frac{1}{5}, 0, 1 \right) \right\}$$

Geométricamente, el conjunto de soluciones es el plano en $\mathbb{R}^3$, que pasa por el punto (1,0,0) y contiene a los vectores $\left( \frac{3}{10}, 1, 0 \right)$ y $\left( \frac{1}{5}, 0, 1 \right)$

## Forma vectorial paramétrica

La ecuación $10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$ se conoce como la descripción/ecuación implícita de un plano.

Desarrollando la ecuación obtenemos la descripción explícita del plano como el conjunto generado por **u** y **v**

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}}$$

Esta ecuación se denomina **ecuación vectorial paramétrica** de un plano, y puede ser escrita como:

$$\mathbf{x} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

CEU Universidad San Pablo

# Existencia y unicidad de soluciones (revisada II)

**Teorema**

Supongamos que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible para $\mathbf{b}$, y que $\mathbf{p}$ es una solución. Entonces, el conjunto de soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es el conjunto de todos los vectores de la forma $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$, donde $\mathbf{v}_h$ es cualquier solución del sistema de ecuaciones homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

**Definición: *Espacio Nulo de A***

Al conjunto de vectores $\mathbf{v}_h$ del teorema anterior, se le denomina *Espacio Nulo de la matriz A*

# Ejercicios

- Tema 2_Enunciados de ejercicios IV
  - Ejercicio 1.5.13
  - Ejercicio 1.5.19

# Índice de contenidos

# Independencia lineal

## Definición: Independencia lineal

Un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_p$ es ***linealmente independiente*** si:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$$

Es decir, la única solución de la ecuación es la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. El conjunto es ***linealmente dependiente*** si existe algún $x_i$ distinto de 0 para el cual se cumpla la ecuación.

CEU Universidad San Pablo

## Ejemplo

Determinar si los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 5, 6)$, y $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 0)$ son linealmente independientes

**Solución**:

La matriz aumentada asociada al sistema de ecuaciones es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dado que el sistema es compatible indeterminado, existen soluciones aparte de la solución trivial y, por lo tanto, los vectores son linealmente dependientes

## Ejemplo (…continuación)

Si es posible, encontrar la relación lineal entre los tres vectores.

**Solución**:

Continuamos transformando la matriz hasta su forma escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, tenemos que $x_1 = 2x_3$ y $x_2 = -x_3$. Por ejemplo, escogiendo $x_3 = 1$, obtenemos que una posible solución al sistema de ecuaciones, siguiendo la fórmula de la definición, es $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 1$. De esta forma tenemos que:

$$\mathbf{2v_1 - v_2 + v_3 = 0}$$

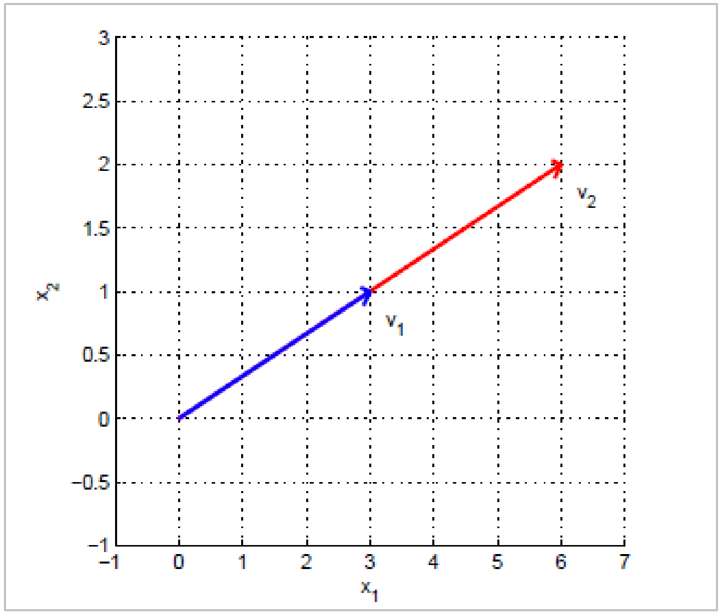
# Independencia lineal

## Interpretación geométrica

Los vectores $\mathbf{v}_1 = (3, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (6, 2)$ son ***linealmente dependientes*** porque:

$$\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1 \implies -2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$$

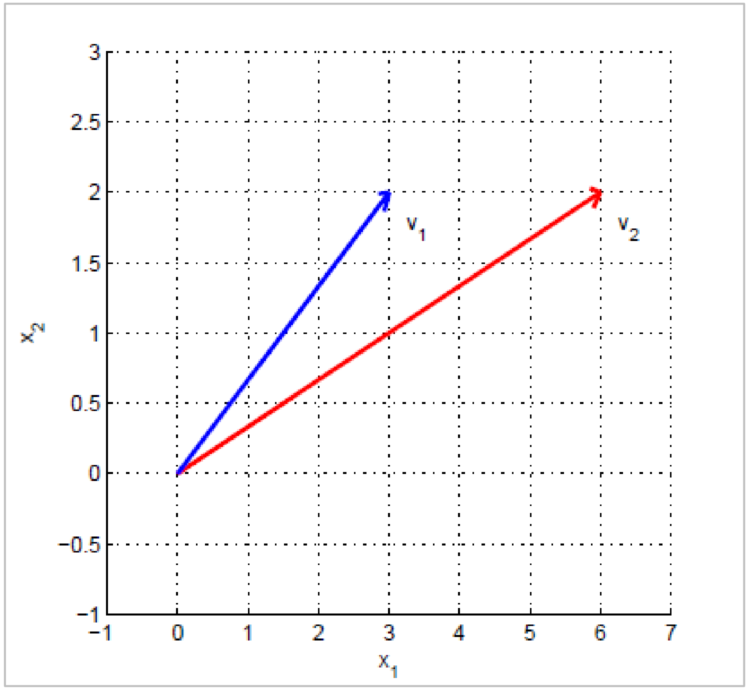
Si dos vectores son linealmente dependientes, entonces cualquiera de ellos es un múltiplo del otro



# Independencia lineal

## Interpretación geométrica

Los vectores $\mathbf{v_1} = (3, 2)$ y $\mathbf{v_2} = (6, 2)$ son *linealmente independientes*

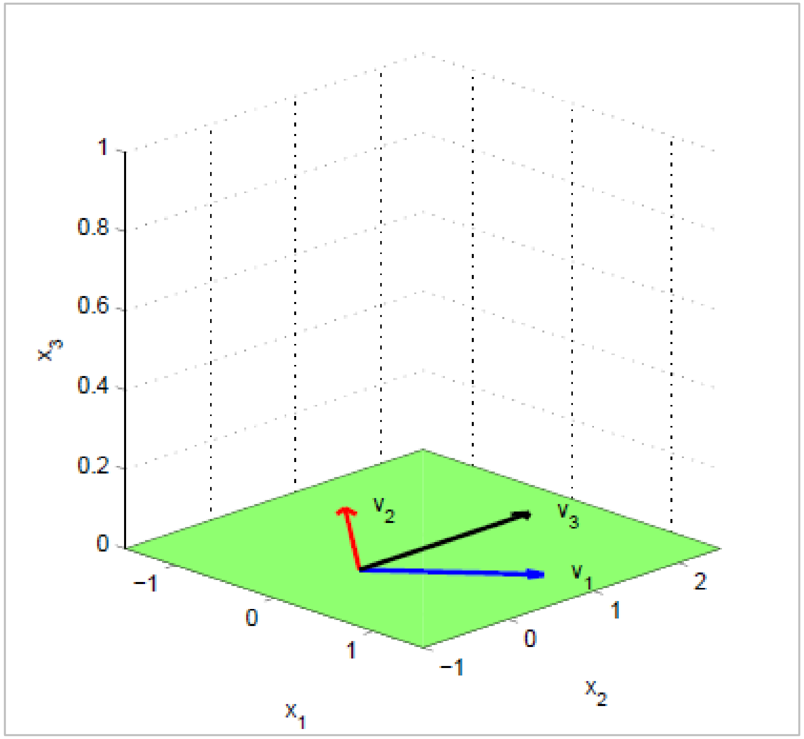


# Independencia lineal

## Interpretación geométrica

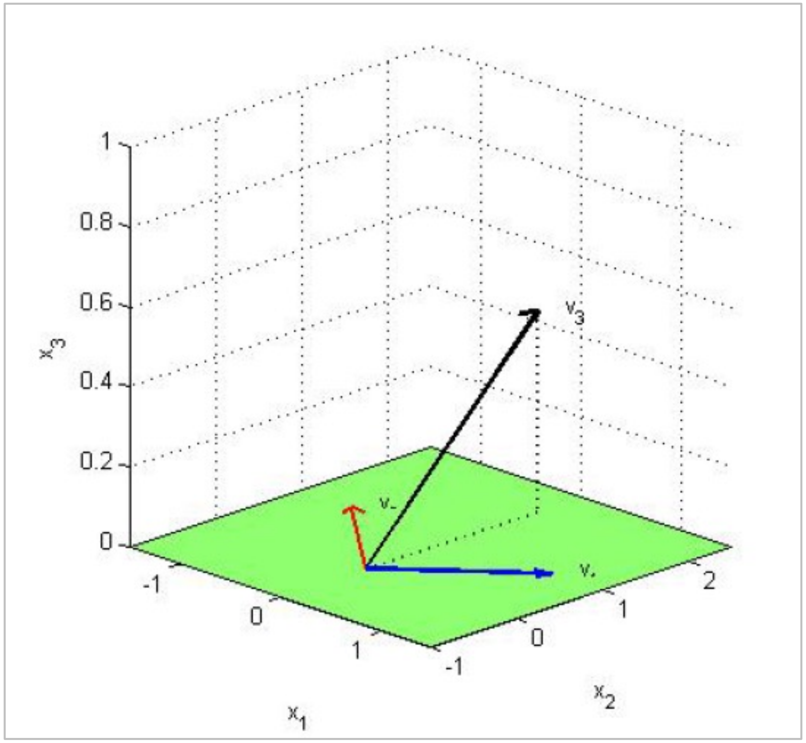
Los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0)$ y $\mathbf{v}_3 = (0, 2, 0)$ son ***linealmente dependientes*** porque:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$



## Interpretación geométrica

Los vectores $\mathbf{v_1} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v_2} = (-1, 1, 0)$ y $\mathbf{v_3} = (0, 2, 1)$ son *linealmente independientes*



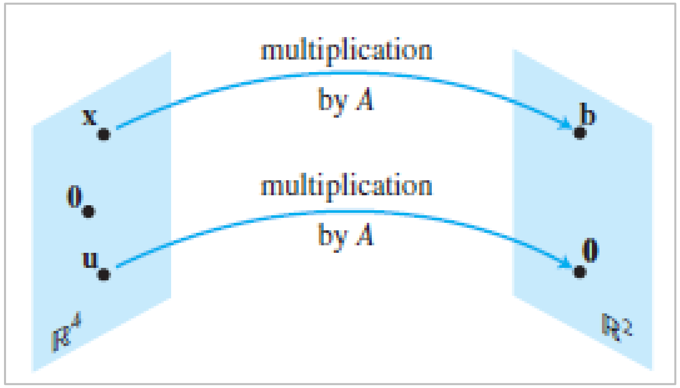
# Índice de contenidos

# Transformaciones lineales

- La multiplicación de una matriz $A$ por un vector $\mathbf{x}$ puede interpretarse como que $A$ es un objeto que actúa (transforma) sobre un vector $\mathbf{x}$ para producir un nuevo vector llamado $A\mathbf{x}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

- De esta forma, podemos interpretar que la multiplicación por $A$, transforma $\mathbf{x}$ en $\mathbf{b}$, y $\mathbf{u}$ en el vector cero



# Transformaciones lineales

## Definición: Transformación

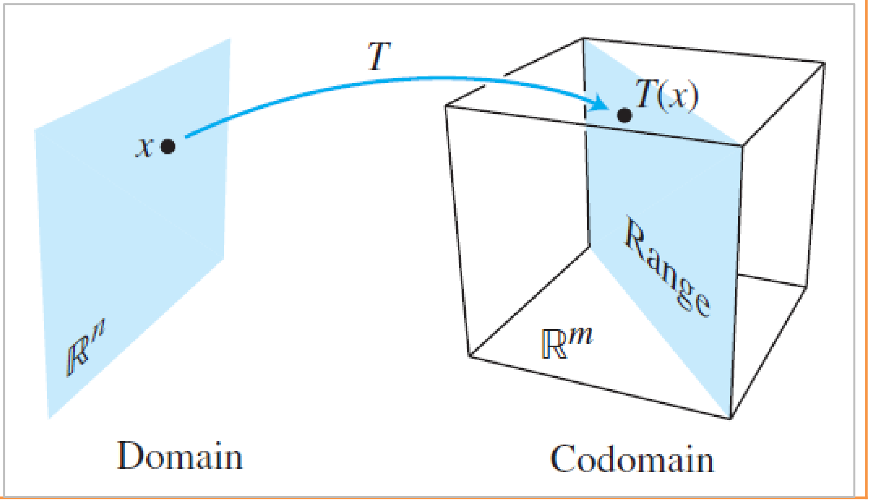
Una ***transformación*** $T$ (o ***función*** o ***mapping***) de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es una regla que asigna a cada vector de $\mathbb{R}^n$ un vector de $\mathbb{R}^m$

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{x} & \longrightarrow & T(\mathbf{x}) \end{array}$$

$\mathbb{R}^n$ se denomina ***dominio*** de la transformación, y $\mathbb{R}^m$ es su ***codominio***

$T(\mathbf{x})$ es la imagen del vector $\mathbf{x}$ bajo la acción de $T$

El conjunto de todas las imágenes es el **rango** de $T$



## Definición: Transformación matricial

$T$ es una ***transformación matricial***, si y sólo si, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para alguna matriz $A \in M_{m\,x\,n}$

## Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ y la transformación matricial $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$

En este caso, por ejemplo, la imagen del vector $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)$ es:

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ busca todos los $\mathbf{x}$, si existen, tales que $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

El ***dominio*** de esta transformación es $\mathbb{R}^4$, y su ***codominio*** es $\mathbb{R}^2$

**Ejemplo**

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la transformación matricial $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$

El ***dominio*** de esta transformación es $\mathbb{R}^2$ , y su ***codominio*** es $\mathbb{R}^3$

Sin embargo, no todos los puntos en $\mathbb{R}^3$ es necesario que sean una imagen de algún punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , sólo un subconjunto de ellos puede serlo. En este caso concreto,

$$\mathbb{R}^{\mathbf{3}} \supset \mathrm{Rango}(T) = \langle (1,0,0),(0,1,0) \rangle$$

En general, el rango de la transformación $T$ es el subespacio generado (Span) por las columnas de la matriz $A$

## Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ y la transformación matricial $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$

1 – ¿Cuál es la imagen de $\mathbf{u}$ = (2, -1) bajo la transformación $T$?

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

2 – Supongamos $\mathbf{b}$ = ( 3, 2, -5 ). Encontrar un $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que la imagen bajo $T$ sea $\mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, tenemos que $\mathbf{b}$ es la imagen de $\mathbf{x} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ bajo la transformación $T$

CEU Universidad San Pablo

## Ejemplo (… continuación)

3 – ¿Hay algún otro **x** cuya imagen bajo la transformación $T$ sea **b**?

No, la solución calculada en el apartado anterior era única, porque el sistema de ecuaciones era compatible determinado

4 – ¿Pertenece el vector $\mathbf{c} = (3, 2, 5)$ al Rango de $T$ / Rango($T$) ?

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}$$

Dado que el sistema es **incompatible**, deducimos que no hay ningún vector **x** cuya imagen sea **c** y, en consecuencia, $\mathbf{c} \notin \text{Rango}(T)$

## Ejemplo (… continuación)

5 – ¿Cuál es la función $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$?

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

6 – ¿Cuál es el $\text{Rango}(T)$?

$$\text{Rango}(T) = \langle (1,3,-1),(-3,5,7) \rangle = Span\{(1,3,-1),(-3,5,7)\}$$

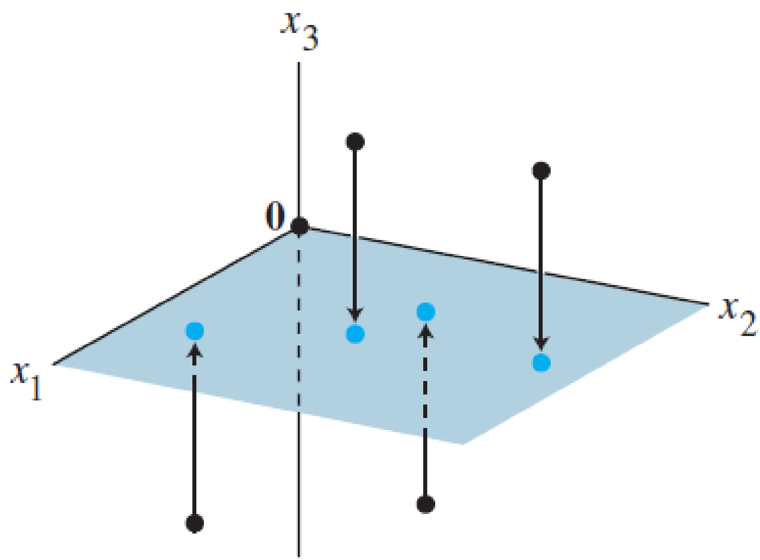
$$\text{Rango}(T) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{y} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Dado que los vectores (1, 3, -1) y (-3, 5, 7) son linealmente independientes, el $\text{Rango}(T)$ es un plano

## Ejemplo

Consideremos la transformación $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esta transformación se denomina ***proyección*** porque proyecta cualquier punto de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $x_1$-$x_2$



# Transformaciones lineales

## Definición: Transformación lineal

$T$ es una ***transformación lineal***, si y sólo si, $\forall \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathrm{Dom}(T), \forall \mathrm{c} \in \mathbb{R}$

1 - $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)$

2 - $T(c\,\mathbf{x}_1) = c\,T(\mathbf{x}_1)$

## Teorema 1

Si $T(\mathbf{x})$ es una transformación lineal, entonces:

1 - $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

2 - $T(c_1\,\mathbf{x}_1 + c_2\,\mathbf{x}_2) = c_1\,T(\mathbf{x}_1) + c_2\,T(\mathbf{x}_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(T), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

**Demostración:**

1 - $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{x}_1) = 0\,T(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$

2 - $T(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = T(c_1\mathbf{x}_1) + T(c_2\mathbf{x}_2) = c_1\,T(\mathbf{x}_1) + c_2\,T(\mathbf{x}_2)$

# Transformaciones lineales

## Teorema 2

Si $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(T), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ se verifica que $T(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1 T(\mathbf{x}_1) + c_2 T(\mathbf{x}_2)$,

entonces $T(\mathbf{x})$ es una ***transformación lineal***

## Corolario: Principio de superposición

$\forall x_i \in \mathrm{Dom}(T), \forall c_i \in \mathbb{R}$ se verifica que $T\left(\sum_i c_i\mathbf{x}_i\right) = \sum_i c_i\, T(\mathbf{x}_i)$

**Demostración:**

Aplicar los teoremas previos múltiples veces

# Transformaciones lineales

## Ejemplo

Demostrar que $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es una transformación lineal

## Ejemplo

Demostrar que $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es una transformación lineal

**Demostración:**

1 – Probar que $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)$

Por un lado tenemos $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} \\ x_{12} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} \\ -x_{12} - x_{22} \end{pmatrix}$

Por otro lado tenemos $T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ -x_{12} \end{pmatrix} +$

$$\begin{pmatrix} x_{21} \\ -x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} \\ -x_{12} - x_{22} \end{pmatrix}$$

## Ejemplo

Demostrar que $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es una transformación lineal

**Demostración:**

1 – Probar que $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)$

Por un lado tenemos $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} \\ x_{12} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} \\ -x_{12} - x_{22} \end{pmatrix}$

Por otro lado tenemos $T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ -x_{12} \end{pmatrix} +$

$$\begin{pmatrix} x_{21} \\ -x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} \\ -x_{12} - x_{22} \end{pmatrix}$$

2 – Probar que $T(c_1\mathbf{x}_1) = c_1\, T(\mathbf{x}_1)$

$$T(c_1\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1x_{11} \\ c_1x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1x_{11} \\ -c_1x_{12} \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} x_{11} \\ -x_{12} \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = c_1\, T(\mathbf{x}_1)$$

### Teorema

Cualquier ***transformación matricial*** es una ***transformación lineal***

**Demostración:**

1 – Probar que $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)$

$$T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)$$

2 – Probar que $T(c_1\mathbf{x}_1) = c_1\, T(\mathbf{x}_1)$

$$T(c_1\mathbf{x}_1) = A(c_1\mathbf{x}_1) = c_1(A\mathbf{x}_1) = c_1\, T(\mathbf{x}_1)$$

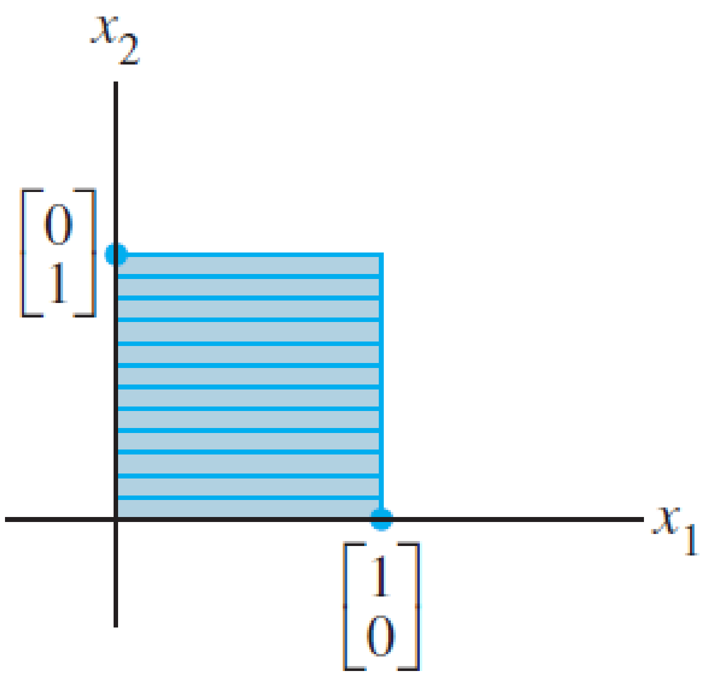
# Ejercicios

- Tema 2_Enunciados de ejercicios V
  - Ejercicio 1.7.9
  - Ejercicio 1.8.17
  - Ejercicio 1.8.23
  - Ejercicio 1.8.34

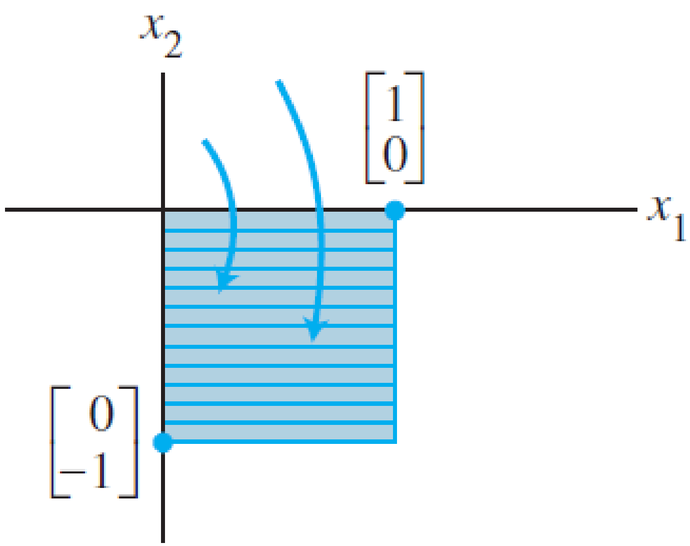
# Índice de contenidos

# Transformaciones geométricas

- Ciertas transformaciones matriciales son usadas para transformar la "celda unidad" en diferentes formas



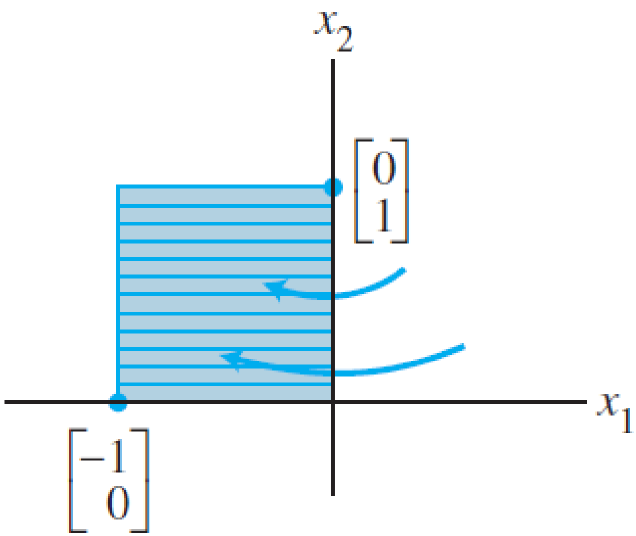
- Reflexión sobre el eje $x_1$




**Matriz estándar**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

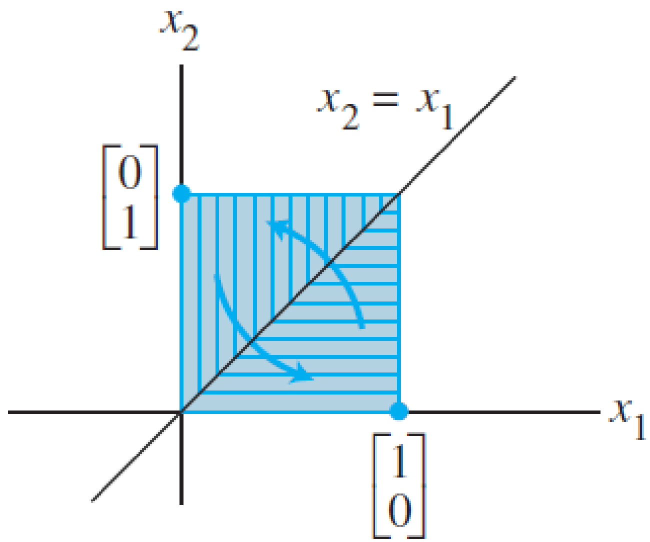
- Reflexión sobre el eje $x_2$




**Matriz estándar**

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

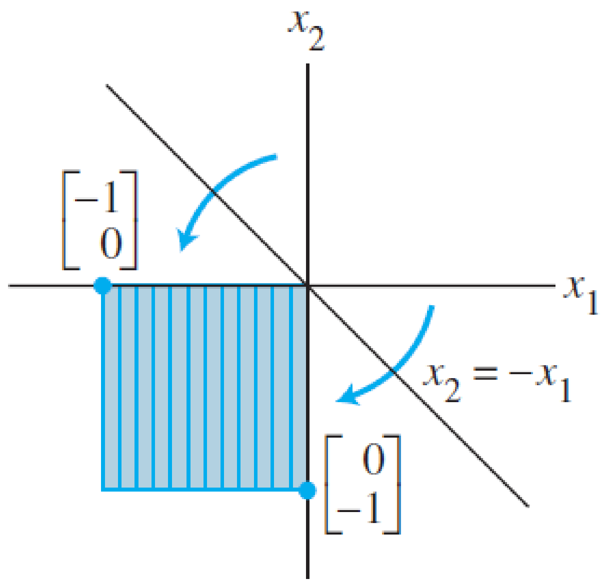
- Reflexión sobre la línea $x_2 = x_1$




**Matriz estándar**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Reflexión sobre la línea $x_2 = -x_1$



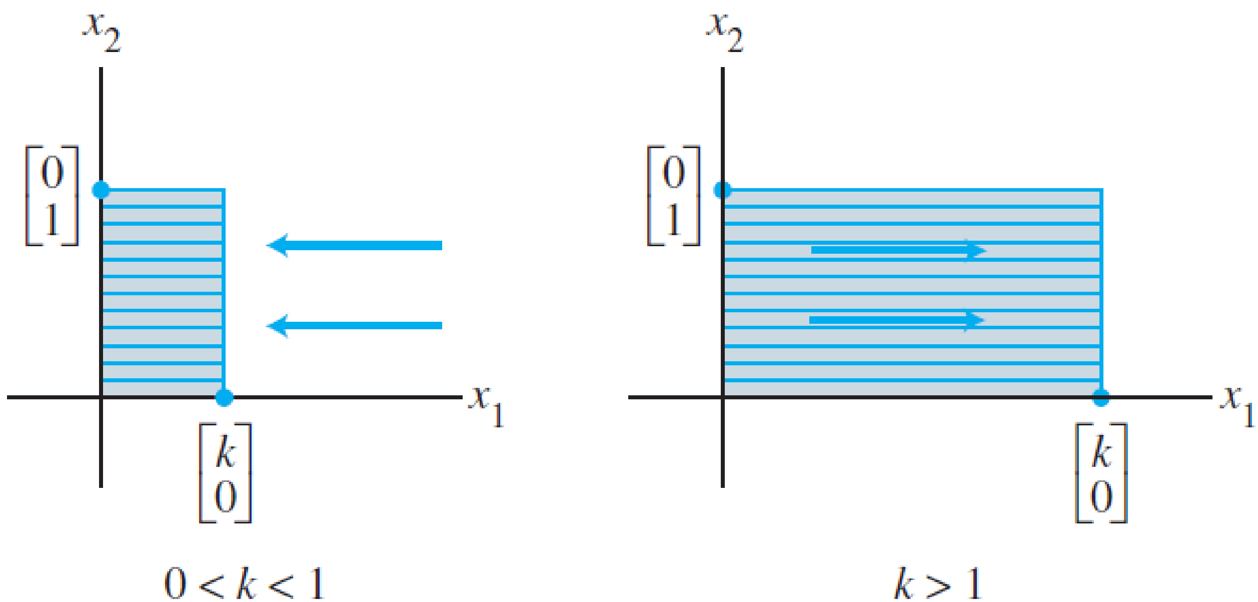

**Matriz estándar**

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Contracción y expansión horizontal

**Matriz estándar**

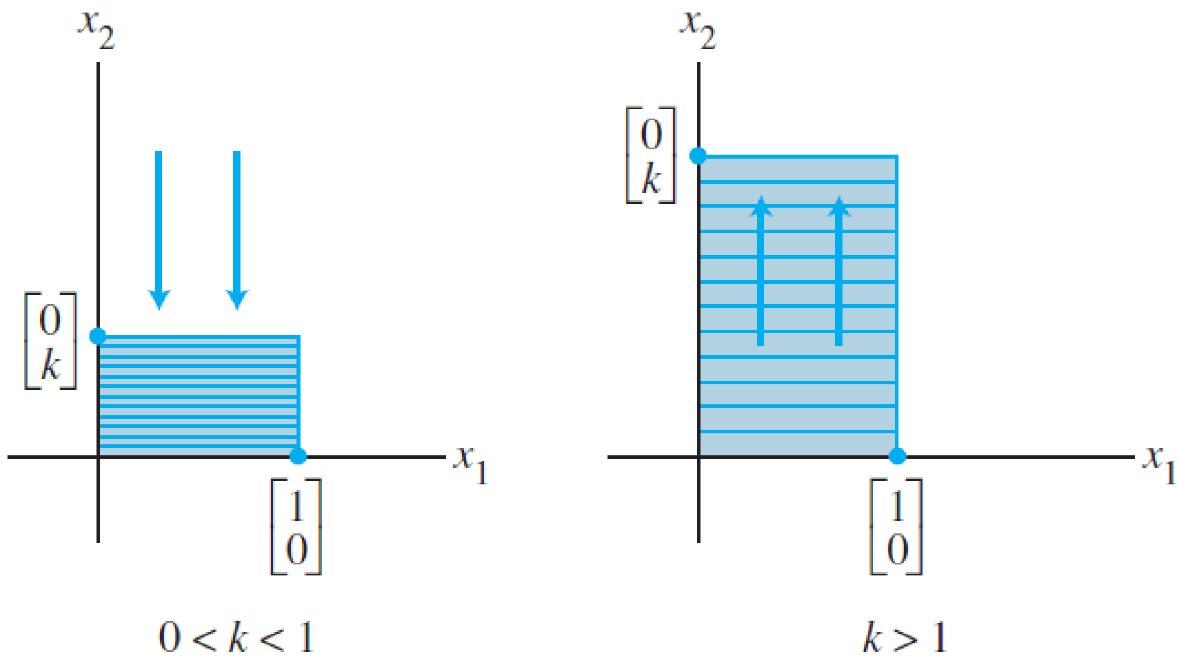
$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



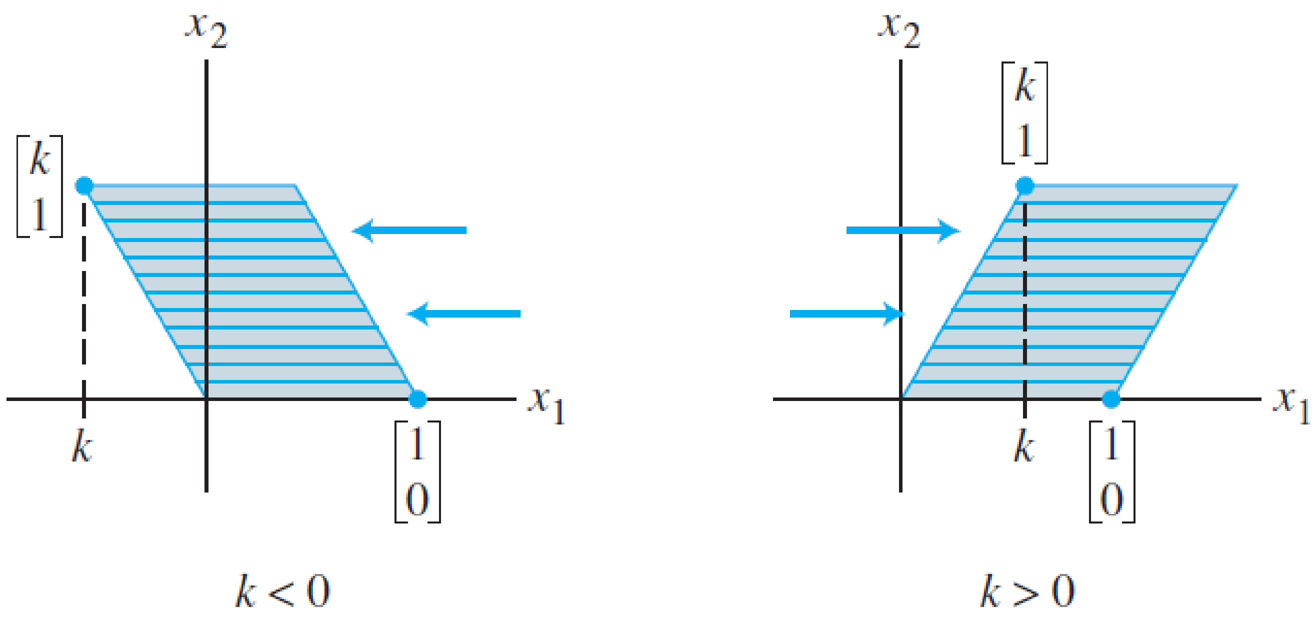
- Contracción y expansión vertical

**Matriz estándar**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$



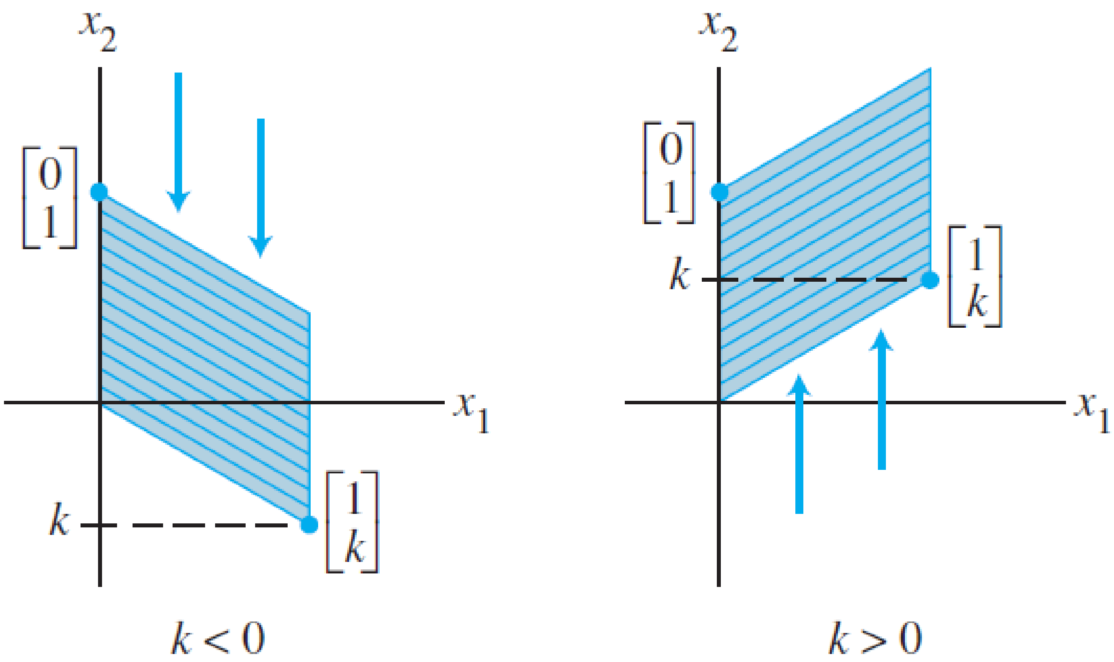
- Deformación (shearing) horizontal




**Matriz estándar**

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

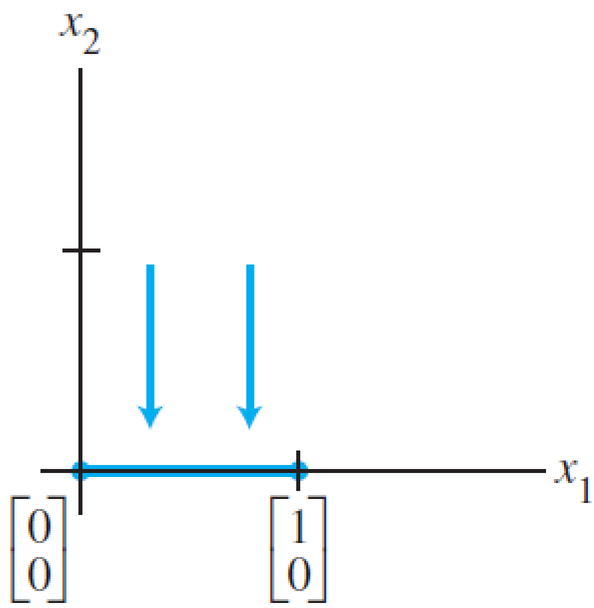
- Deformación (shearing) vertical




**Matriz estándar**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

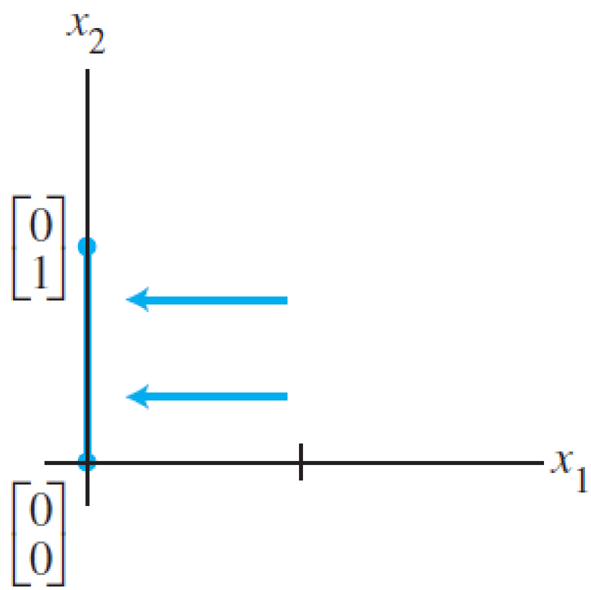
- Proyección sobre el eje $x_1$




**Matriz estándar**

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

- Proyección sobre el eje $x_2$




**Matriz estándar**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Ejercicios

- Tema 2_Enunciados de ejercicios VI
  - Ejercicio 1.9.4
  - Ejercicio 1.9.8
  - Ejercicio 1.9.10